CONSTRUCTION GÉOMÉTRIQUE DE REPRÉSENTATIONS DE WEIL SUR UN CORPS FINI

JOSÉ PANTOJA ET JORGE SOTO-ANDRADE

Abstract. We construct, by contraction of a suitable complex vector bundle, the Weil representation of the finite symplectic group $Sp(A)$. We give an explicit description of the space of all lagrangian subspaces, which we use to compute the cocycle of our representation in terms of a geometric Gauss sum. We recover in this way previously constructed generalized Weil representations (see [2, 3]) by restriction of our representation to an appropiate embedding of $SL(n)$ into $Sp(A)$.

1. Connexions équivariantes sur un $Sp(A)$-fibré vectoriel

Soit (W, A) un espace symplectique non-dégénéré, de dimension paire $n = 2m$ sur un corps fini k à q éléments. Nous rappelons la construction géométrique de la représentationde Weil du groupe $Sp(A)$, par contraction d'un $Sp(A)$ - fibré vectoriel complexe convenable à l'aide d'une connexion équivariante, qui a été indiquée en [4] dans le cas $m = 1$.

Posons $G = Sp(A)$. Désignons $\mathcal{X}$ l'ensemble de tous les caractères non nuls du groupe additif k^+ de k et fixons un caractère non-trivial $\psi \in \mathcal{X}$. Nous définissons un G - fibré vectoriel complexe (E, p, B, τ) par les données suivantes:

- la base B est l'ensemble de tous les sous-espaces lagrangiens (c'est-à-dire totalement isotropes maximaux) de l'espace symplectique W;

- l'espace total E est la réunion disjointe des espaces E_L $(L \in B)$ formés de toutes les fonctions complexes f sur W telles que

$$f(x + y) = \psi(A(x, y))f(x)$$

pour tous les $x \in W$ et $y \in L, \psi \in \mathcal{X}$ étant fixé;

- p désigne la projection canonique de E sur B, qui à chaque $f \in E_L$ fait correspondre L;

- L'action τ de G dans E et B est donnée par

$$[\tau_g(f)](x) = f(g^{-1}(x))$$

Pantoja a été subventionné par DGI-UCV 124.736/94, par la Coopération française (Programme ECOS), et par FONDECYT (Projet 1950895). Soto-Andrade a été subventionné par la Coopération française (Programme ECOS), par FONDECYT (Projet 1940590), ainsi que par le Grant NSF DMS/9022140 pendant son séjour au MSRI..

, pour $g \in G, f \in E, x \in W$, et

$$\tau_g(L) = g(L)$$

pour $g \in G, L \in B$. Nous définissons une connexion $\Gamma = \{\gamma_{L',L}\}_{L',L \in B}$ sur le fibré (E, p, B) par

$$(\gamma_{L',L} f)(\omega, \psi) = (|L||L \cap L'|)^{-\frac{1}{2}} \sum_{\zeta \in L'} \psi(A(\omega, \zeta)) f(\omega + \zeta)$$

PROPOSITION **1. Propriétés de Γ**

i):

$$\gamma_{L,L} = Id_{E_L}$$

ii):

$$\gamma_{L,L'} \circ \gamma_{L',L} = \gamma_{L,L} = Id$$

iii):

$$\gamma_{L'',L'} \circ \gamma_{L',L} = |L'' \cap L'|^{\frac{1}{2}} (|L \cap L''||L' \cap L||L|)^{-\frac{1}{2}} \mathcal{S}_L(L', L'') \gamma_{L'',L}$$

où l'on note $\mathcal{S}_L(L', L'')$, ou plus précisement $\mathcal{S}_L^W(L', L'')$, la somme de Gauss géométrique associée à l'espace symplectique W et ses lagrangiens L, L', L'' , définie par

$$\mathcal{S}_L(L', L'') = \mathcal{S}_L^W(L', L'') = \sum_{\zeta \in L \cap (L' + L'')} \psi(A(\zeta', \zeta'')) \ ,$$

où ζ' (resp. ζ'') désigne la composante de $\zeta \in L \cap (L' + L'')$. selon L' (resp. L'').

Démostration.-

ii) On a

$$(\gamma_{L,L'} \circ \gamma_{L',L} f)(\omega) = (|L||L \cap L'|)^{-\frac{1}{2}} \sum_{\zeta \in L} \psi(-A(\omega, \zeta))(\gamma_{L',L} f)(\omega + \zeta) =$$

$$= (|L||L \cap L'|)^{-1} \sum_{\zeta \in L} \sum_{\zeta \in L'} \psi(-A(\omega, \zeta) - A(\omega + \zeta, \zeta'))(f)(\omega + \zeta + \zeta')$$

$$= (|L||L \cap L'|)^{-1} \sum_{\zeta \in L'} \sum_{\zeta \in L} \psi(-A(\omega, \zeta) - A(\omega + \zeta, \zeta') + A(\omega + \zeta', \zeta))(f)(\omega + \zeta')$$

$$= (|L||L \cap L'|)^{-1} \sum_{\zeta \in L'} [\sum_{\zeta \in L} \psi(2A(\zeta', \zeta)] \psi(-A(\omega, \zeta')) f(\omega + \zeta')$$

$$= (|L \cap L'|)^{-1} \sum_{\zeta \in L' \cap L} \psi(-A(\omega, \zeta')) f(\omega + \zeta') = f(\omega) \ ,$$

puisque le charactère $\zeta \mapsto \psi(A(\zeta', \zeta)$ du groupe additif de L est non-trivial si et seulement si $\zeta' \in L' \cap L^\perp = L \cap L'$ et que $f \in E_L$

iii) Nous avons, quels que soient $f \in E_L, \omega \in W, \psi \in \mathcal{X}$,

$$
\begin{aligned}
&(\gamma_{L,L''}\circ\gamma_{L'',L'}\circ\gamma_{L',L}f)(\omega) = \\
&= (|L|^3|L''\cap L||L'\cap L''|)|L\cap L'|)^{-\frac{1}{2}}\sum_{\zeta''\in L''}\sum_{\zeta'\in L'}\sum_{\zeta\in L}\psi(-A(\omega,\zeta)-A(\omega+\zeta,\zeta'')- \\
&\quad -A(\omega+\zeta+\zeta'',\zeta'))f(\omega+\zeta+\zeta''+\zeta') \\
&= (|L|^3|L''\cap L||L'\cap L''||L\cap L'|)^{-\frac{1}{2}}\sum_{\zeta''\in L''}\sum_{\zeta'\in L'}[\sum_{\zeta\in L}\psi(2A(\zeta''+\zeta',\zeta))]\psi(-A(\omega,\zeta'+\zeta'')-A(\zeta'',\zeta')) \\
&\quad f(\omega+\zeta''+\zeta') \\
&= (|L||L''\cap L||L'\cap L''||L\cap L'|)^{-\frac{1}{2}}[\sum_{\substack{\zeta'\in L',\zeta''\in L''\\ \zeta'+\zeta''\in L}}\psi(A(\zeta',\zeta''))]\psi(-A(\omega,\zeta'+\zeta'')f(\omega+\zeta''+\zeta') \\
&= (|L||L''\cap L||L\cap L'|)^{-\frac{1}{2}}|L'\cap L''|^{\frac{1}{2}}[\sum_{\zeta\in L\cap(L'+L'')}\psi(A(\zeta',\zeta''))]
\end{aligned}
$$

où, pour chaque $\zeta\in L\cap(L'+L'')$, on note ζ'(resp. ζ'') sa composante dans L' (resp.L'') selon une décomposition quelconque $\zeta=\zeta'+\zeta''$.

On définit ainsi une forme quadratique $Q_L^{L',L''}$ sur l'espace $L\cap(L'+L'')$ par

$$Q_L^{L',L''}(\zeta)=A(\zeta,\zeta'),$$

quel que soit $\zeta\in L\cap(L'+L'')$ ' , et où $\zeta=\zeta'+\zeta''$ est une décomposition quelconque de $\zeta\in L\cap(L'+L'')$, avec $\zeta'\in L'$ et $\zeta'\in L''$. Notons que la valeur de $A(\zeta',\zeta'')$ ne dépend alors pas de la décomposition choisie de $\zeta\in L\cap(L'+L'')$

Corollaire **1.** .- Γ *est une connexion G -équivariante sur le fibré (E,p,B,τ) , dont le multiplicateur μ est donné par*

$$\mu(L'',L",L)=|L''\cap L'|^{\frac{1}{2}}(|L\cap L''||L'\cap L||L|)^{-\frac{1}{2}}\mathcal{S}_L(L',L'')$$

2. Calcul de la somme de Gauss géométrique $\mathcal{S}_L(L',L'')$

Nous décrivons tout d'abord les sous-espaces lagrangiens de l'espace symplectique (W,B).

Notons A l'anneau involutif A des matrices $n\times n$ sur k, dont l'involution est la transposée. A chaque espace symplectique (W,B), de dimension paire $2m$, sur le corps k on associe un module symplectique $(M,\mathbf{B})$ sur A, comme suit:
On pose $M=W^m$ et l'on muni M de la forme sesquilinéaire alternée $\mathbf{B}$ à valeurs dans A donnée par

$$\mathbf{B}(u,v)=(B(u_i,v_j))_{1\leq i,j\leq m}$$

On a alors

$$\mathbf{B}(hu,v)=h\mathbf{B}(u,v)$$

$$\mathbf{B}(u, hv) = \mathbf{B}(u, v)h^*$$
$$\mathbf{B}(v, u) = \mathbf{B}(u, v)^*$$

D'autre part désignons par $\langle u \rangle$ le sous-espace vectoriel de W engendré par les composantes $u_1, \dots, u_n$ de $u \in M = W^m$. On note alors rgu le rang de $u \in M$, défini comme la dimension de l'espace $\langle u \rangle$. On a $rgu = m$ si et seulement si u est un vecteur libre dans le A-module M. Notons que $\langle u \rangle = \langle v \rangle$ si et seulement si $v = hu$ pour une matrice $h \in A$ convenable. Remarquons que pour que $\langle u \rangle$ soit Lagrangien il faut et il suffit que u soit un vecteur isotrope libre dans le module symplectique $(M, \mathbf{B})$. Soit $\{p_1, \dots, p_m, q_1, \dots, q_m\}$ une base symplectique de (W, B). Alors on a

$$B(p_i, q_j) = \delta_{i,j}$$

quels que soient $1 \leq i, j \leq m$ et les deux vecteurs isotropes $P = (p_1, \dots, p_m)$ et $Q = (q_1, \dots, q_m)$ forment un système libre dans M tel que $\mathbf{B}(P, Q) = Id_m$

Proposition 2. *Pour que l'espace $L_{a,b} = \langle aP + bQ \rangle$, $(a, b \in A)$ soit Lagrangien il faut et il suffit que $aA + bA = A$ (on dit alors que a et b sont relativement premiers) et que $ab^* = ba^*$. En plus, tout sous-espace Lagrangien L de (W, B) est un $L_{a,b}$ pour $a, b \in A$ convenables et $L_{a,b} = L_{a',b'}$ équivaut à $a' = ca$ et $b' = cb$ pour un $c \in A$.*

Remarquons que le A-module M est muni d'une application $(\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot u = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_m u_m$ de $k^m \times M$ sur W, qui permet d'identifier en fait M avec $Hom_k(k^m, W)$ en tant que A- module gauche.

Lemme 1. *On a*

$$g(L_{[a,b]}) = L_{[a,b]g^*}$$

quelques soient $g \in G, L_{[a,b]} \in \mathcal{L}$

Lemme 2. *On a, quels que soient $\lambda, \mu \in k^m, a, b \in A, u, v \in M$,*

$$B(\lambda \cdot u, \;\; \mu \cdot v) = \lambda \; \mathbf{B}(u, v)\mu$$

Proposition 3. *On a*

$$S_{L_{[a,b]}}(L', L'') = S(ab^*),$$

où l'on note $S(Q)$ la somme de Gauss classique

$$\sum_{x \in E} \psi(Q(x)) \; ,$$

associée à un espace quadratique (E, Q) , le caractère non-trivial ψ du groupe additif k^+ étant fixé.

Lemme 3. *Soient $L', L'' \in \mathcal{L}$. Alors pour chaque $L \in \mathcal{L}$ le sous-espace*

$$\tilde{L} = L \cap (L' + L'') + L' \cap L''$$

de $L' + L''$ est encore un sous-espace lagrangien de W et le sous-espace $\tilde{L}/L' \cap L''$ est un lagrangien de l'espace symplectique non-dégénéré $(L' + L'')/L' \cap L''$. En plus on a

$$S_L^W(L', L'') = |L \cap L' \cap L''| S_{\tilde{L}/L'\cap L''}^{(L'+L'')/L'\cap L''}(L'/L' \cap L'', L''/L' \cap L'')$$

PROPOSITION **4.** *On a*

$$|S_L(L', L'')| = |L'' \cap L'|^{-\frac{1}{2}}(|L \cap L''||L' \cap L||L|)^{\frac{1}{2}} = q^{m-\frac{1}{2}r(ab^*)} = q^{\frac{1}{2}(3m-r(a)-r(b))},$$

quels que soient $L, L', L'' \in \mathcal{L}$, où $r(x)$ désigne le rang d'une matrice $x \in A$.

PROPOSITION **5.** *Le cocycle $c(g, h)$ de la représentation de Weil (V, ρ) de G associée à $L_o \in B$ est donné par*

$$c(g, h) = |\mathcal{S}_{L_o}(gL_o, ghL_o)|^{-1}\mathcal{S}_{L_o}(gL_o, ghL_o)$$

quels que soient $g, h \in G$.

3. Les représentations de Weil généralisées des groupes $SL(n, k)$

Soit V un espace vectoriel de dimension finie n sur le corps fini k. Nous définissons l'espace symplectique (W, A) associé à V par $W = \bigwedge^1 V \oplus \bigwedge^3 V \oplus \cdots \oplus \bigwedge^{n-1} V$ si n est pair (resp. $W = \bigwedge^1 V \oplus \bigwedge^2 V \oplus \cdots \oplus \bigwedge^{n-1} V$ si n est impair) et

$$A(\omega, \zeta) = (\omega \wedge \zeta)_n \in \bigwedge^n V \simeq k$$

(resp.

$$A(\omega, \zeta) = (\omega \wedge \zeta^\vee)_n \in \bigwedge^n V \simeq k \quad ,$$

où $\zeta^\vee = \sum_{0 \le i \le n}(-1)^i\zeta_i$ pour $\zeta = \sum_{0\le i\le n} \zeta_i$).

Le groupe $H = SL(V) \simeq SL(n, k)$ agit naturellement dans (W, A) et s'identifie ainsi a un sous-groupe de G , auquel nous pouvons restreindre la représentation de de Weil généralisée décrite ci-dessus. Notons (U, ρ) la représentation de H ainsi obtenue.

On recupère ainsi les représentations que nous avons construites dans [2], [3]. De plus, comme la connexion Γ que nous avons construite ci-dessus permet de passer d'une H orbite quelconque à une autre, elle fournit en fait des isomorphismes entre des représentations de Weil généralisées de H associées à des orbites differentes. Ceci s'applique en particulier au cas des H-orbites réduites à un lagrangien et aux orbites introduites dans loc. cit., et fournit une construction uniforme de certains isomorphismes notables entre des représentations naturelles et des représentations de Weil généralisées, déjà remarqués par P. Cartier dans les années 60, dans le cas $n = 2$.

Nous remarquons enfin que l'on peut construire des opérateurs d'entrelacement de (U, ρ) comme suit.

Soit ϕ un automorphisme symplectique W qui commute à l'action de H dans W. L'automorphisme ϕ fournit alors un automorphisme du G-fibré vectoriel associé à l'espace symplectique (W, A), défini au paragraphe 1, qui commute avec sa connection Γ. On en tire aussitôt un automorphisme Φ de la représentation (U, ρ).

On peut vérifier que, pour $n \leq 4$, le groupe d'opérateurs d'entrelacement ainsi obtenu (qui représente donc le centralisateur $Z_G(H)$ de H dans G) engendre l'essentiel de l'algèbre commutante de la représentation (U, ρ) de H (au sens que le rapport entre la dimension du sous-espace vectoriel engendré par ces opérateurs et la dimension de l'algèbre commutante de la représentation (U, ρ) tend vers 1 pour q tendant vers l'infini).

References

[1] Lion, G. and Verne, M., *The Weil Representation, Maslow Index and Theta Series*, Progress in Math., vol. 6, Birkäuser-Verlag, Basel-Boston, 1980.

[2] Pantoja, J., Soto-Andrade, J., Groupes de Grassmann-Heisenberg et représentations de Weil généralisées pour $SL(n)$, n paire, Astérisque **168**(1988), p. 167-190.

[3] Pantoja, J., Soto-Andrade, J., Generalized Weil representations for $SL(n,k)$, n odd, k a finite field, p. 199-206, dans *New Developpments in Lie Theory and their Applications*, eds. J. A. Tirao, N. Wallach, Birkhäuser-Verlag, Boston,1992.

[4] Soto-Andrade, J., Geometrical Gel'fand Models, tensor quotients and Weil representations, Proc. Symp. Pure Maths., **47**, AMS, Providence, 1987, p. 305-316.

Pantoja: Instituto de Matemática, Universidad Católica de Valparaíso, Casilla 4059, Valparaíso, Chile

E-mail address: `jpantoja@aix1.ucv.cl`

Soto-Andrade: Departamento de Matemáticas, Universidad de Chile, Casilla 653, Santiago, Chile

E-mail address: `sotoandr@orphee.polytechnique.fr` ou `sotoandr@abello.dic.uchile.cl`