Déformations formelles de revêtements : un principe local-global

José Bertin et Ariane Mézard

Abstract: Let C be a generically smooth, locally complete intersection curve defined over an algebraically closed field k of characteristic $p \geq 0$. Let $G \subset \mathrm{Aut}_k C$ be a finite group of automorphisms of C. We develop a theory of G-equivariant deformations of the Galois cover $C \to C/G$. We prove that all obstructions to G-equivariant deformations are local: they are localized at singular and widely ramified points. As an application, we discuss the case of G-equivariant deformations of semi-stable curves.

1 Introduction

Pour étudier le groupe fondamental d'une courbe algébrique en caractéristique $p > 0$, une des méthodes fondamentales est la construction de revêtements par relèvement ou par épaississement ([HaSt]). L'objet de ce travail est de montrer que la théorie des déformations équivariantes, exposée d'un point de vue formel par Illusie ([Il]), permet d'unifier ces constructions. Soit C une courbe réduite connexe (génériquement lisse), localement d'intersection complète définie sur un corps k algébriquement clos de caractéristique $p \geq 0$. Soit $G \subset \mathrm{Aut}_k C$ un groupe fini d'automorphismes de C. Nous développons dans cet article une théorie des déformations G-équivariantes du revêtement galoisien $C \to C/G$ (§2). Nous considérons les déformations équivariante de voisinages formels des points de ramification ou des points singuliers éventuels (§3). Nous établissons que les obstructions aux déformations G-équivariantes sont toutes de nature locale (Théorème 4.1.3) : ces obstructions sont localisées en un ensemble fini de points formé des points singuliers et des points de ramification sauvage. Nous montrons ensuite comment ce principe local-global permet d'expliquer et de généraliser plusieurs résultats récents sur les questions de relèvements et d'épaississements des revêtements ([BeMé],[GrMa], [HaSt],[He]). Enfin (§5), nous traitons plus en détail le cas des courbes semi-stables. Il s'agit alors de décrire l'anneau versel de déformations équivariantes d'un point double.

Mots clés : déformation équivariante, principe local-global, courbe singulière.
This paper was written during a very pleasant stay of the authors at the MSRI. Research at MSRI is supported in part by NSF grant DMS-97011755.

2 Déformations équivariantes : cas global

Nous rappelons d'abord brièvement le formalisme des déformations équivariantes. Nous nous concentrons ensuite sur les déformations équivariantes de courbes projectives éventuellement singulières.

Tous les schémas que nous considèrons sont localement noethériens. Soit S un tel schéma et Sch_S la catégorie des S-schémas. Soit X un S-schéma localement de type fini et plat. Soit $G \subset \mathrm{Aut}_S X$ un groupe fini de S-automorphismes de X. Soit S' un S-schéma. Un *relèvement G-équivariant* de X à S' est la donnée
- d'un schéma X' plat sur S' tel que

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & X' \\ \downarrow & & \downarrow \\ S & \longrightarrow & S' \end{array}$$

soit un produit fibré : $X \xrightarrow{\sim} X' \times_{S'} S$.
- et d'une action de G sur X'/S' qui rend le morphisme φ G-équivariant.
Deux relèvements G-équivariants $(X'_1, \varphi_1), (X'_2, \varphi_2)$ de X à S' sont *équivalents* s'il existe un S'-isomorphisme G-équivariant

$$f : X'_1 \xrightarrow{\sim} X'_2, \quad \text{avec } f\varphi_1 = \varphi_2$$

Une *déformation G-équivariante* de X à S' est une classe d'équivalence de relèvements G-équivariants de X à S'. Le *foncteur des déformations G-équivariantes* est défini par

$$D_{X/S,G} : \mathrm{Sch}_S \to \mathrm{Ens}, \quad S' \mapsto \{\text{déformations } G\text{-équivariantes de } X \text{ à } S'\}$$

L'objet de ce travail est l'étude de ce foncteur dans le cas particulier où X est une courbe C réduite connexe (génériquement lisse), localement d'intersection complète, définie sur un corps k algébriquement clos de caractéristique $p \geq 0$. Nous supposons C munie de l'action d'un groupe fini G d'automorphismes.
Soit Λ un anneau de valuation discrète complet de caractéristique 0 de corps résiduel k, par exemple $\Lambda = W(k)$ anneau des vecteurs de Witt de k. Soit $\widehat{\mathcal{C}}$ la catégorie dont les objets sont les Λ-algèbres R locales noethériennes complètes, avec $k \cong R/\mathcal{M}_R$ pour $\mathcal{M}_R$ idéal maximal de R ; les flèches sont les Λ-morphismes d'anneaux locaux. La catégorie $\mathcal{C}$ est la sous-catégorie pleine de $\widehat{\mathcal{C}}$ formée des objets qui sont de longueur finie comme Λ-modules. Notons $k[\varepsilon]$, où $\varepsilon^2 = 0$, l'anneau de $\mathcal{C}$ des nombres duaux sur k. Définissons le *foncteur des déformations G-équivariantes globales*

$$D_{\mathrm{gl}} : \mathcal{C} \to \mathrm{Ens}, \quad A \mapsto \{\text{déformations } G\text{-équivariantes de } C \text{ à } \mathrm{Spec}\, A\}$$

Notons $\Omega^1_{C/k}$ le faisceau des différentielles de Kähler de la courbe C. Comme dans le cas des déformations G-équivariantes des courbes lisses ([BeMé]), nous montrons que l'espace tangent au foncteur D_{gl} est $D_{\mathrm{gl}}(k[\varepsilon]) \simeq \mathbf{Ext}^1_{\mathcal{O}_C,G}(\Omega^1_{C/k}, \mathcal{O}_C)$ (pour la définition du foncteur **Ext** voir [Gr1] 5.6.7). Les obstructions aux déformations appartiennent au groupe $\mathbf{Ext}^2_{\mathcal{O}_C,G}(\Omega^1_{C/k}, \mathcal{O}_C)$ (pour la théorie générale des déformations équivariantes voir [Il]). D'après le critère de Schlessinger ([Sc] §3.7), le foncteur D_{gl} admet un *anneau versel de déformations* R_{gl}. Par définition, l'anneau R_{gl} est un objet de $\widehat{\mathcal{C}}$ tel qu'il existe un morphisme lisse $\xi : D_{\mathrm{gl}} \to \mathrm{Hom}_\Lambda(R_{\mathrm{gl}}, -)$ induisant un isomorphisme $D_{\mathrm{gl}}(k[\varepsilon]) \simeq (\mathcal{M}_{R_{\mathrm{gl}}}/\mathcal{M}^2_{R_{\mathrm{gl}}})^*$ entre espaces tangents. Le morphisme ξ est identifié à une classe d'équivalence de schéma formel $[\xi] = \{[\xi_n]\}_{n\geq 1} \in \varprojlim D_{\mathrm{gl}}(R_{\mathrm{gl}}/\mathcal{M}^n_{R_{\mathrm{gl}}})$. D'après le théorème d'algébrisation de Grothendieck ([Gr3]), le schéma formel ξ est algébrisable. Ce schéma formel est donc le complété formel d'une courbe C_{gl} sur $\mathrm{Spec}\, R_{\mathrm{gl}}$ dite *courbe verselle de déformations*.

Le premier résultat de ce travail est la description des obstructions pour le foncteur D_{gl}. Nous allons montrer que les obstructions aux déformations G-équivariantes globales sont toutes localisées en un ensemble fini de points formé des points singuliers et des points de ramification sauvage de C (Théorème 4.1.3). C'est pourquoi, nous détaillons dans le paragraphe suivant (§3) l'étude des déformations équivariantes en un voisinage formel d'un point de la courbe C.

3 Déformations équivariantes : cas local

Soit C une courbe vérifiant les hypothèses du paragraphe précédent (§2). Soit $x \in C$ et soit $\widehat{\mathcal{O}}_{C,x}$ l'anneau local complété de la courbe C au point x. Notons $G_x \subset \mathrm{Aut}_k\, \widehat{\mathcal{O}}_{C,x}$ le stabilisateur de x. Avant d'étudier les déformations G_x-équivariantes de C au voisinage (formel) du point x, nous développons brièvement le formalisme de Lichtenbaum et Schlessinger ([LiSc], voir aussi [Vi]) dans le contexte équivariant. Les anneaux sont ici commutatifs et noethériens. Soit B une A-algèbre plate et $G \subset \mathrm{Aut}_A\, B$ un groupe fini de A-automorphismes de B. Soit $A' \to A$ un homomorphisme d'anneaux surjectif de noyau J tel que $J^2 = 0$. Une *G-déformation* de B/A à A' est une G-extension B' (i.e. G agit sur B')

$$0 \to B \otimes J \to B' \to B \to 0$$

telle que B' soit plat sur A'. Par souci de clareté, nous commençons par des généralités sur les (B,G)-modules (§3.1), puis nous montrons que les G-déformations de B/A à A' sont décrites par les groupes $\mathrm{Ext}^i_{B,G}(\Omega^1_{B/A}, J \otimes B)$, $i = 1, 2$ (Théorème 3.2.2). A l'aide d'un dévissage spectral nous donnons une présentation explicite des groupes $\mathrm{Ext}^i_{B,G}(\Omega^1_{B/A}, J \otimes_A B)$, $i = 1, 2$ (§3.3). Nous appliquons enfin ces résultats aux déformations équivariantes locales de la courbe C au point x (§3.4).

3.1 (B, G)-modules

Notons $B[G]$ l'algèbre libre sur B de base $(\sigma)_{\sigma\in G}$ avec la relation de commutation $\sigma b\sigma^{-1} = \sigma(b)$. Un (B, G)-*module* M est un B-module muni d'une action de G compatible avec l'action de G dans B :

$$\sigma(b\cdot x) = \sigma(b)\cdot\sigma(x), \quad b\in B, x\in M, \sigma\in G$$

Si M, N sont des (B, G)-modules, alors

$$\mathrm{Hom}_{B,G}(M, N) \simeq \mathrm{Hom}_B(M, N)^G$$

où $\mathrm{Hom}_B(M, N)$ est muni d'une action de G définie par $\sigma(f)(x) = \sigma(f(\sigma^{-1}(x)))$, $\sigma\in G$, $f\in \mathrm{Hom}_B(M, N)$, $x\in M$. Cette propriété justifie l'existence de la suite spectrale ([Gr1] Théorème 5.6.3)

$$E_2^{i,j} = H^i(G, \mathrm{Ext}^j_B(M, N)) \Rightarrow \mathrm{Ext}^{i+j}_{B,G}(M, N)$$

où $\mathrm{Ext}^n_{B,G}(M, N) = R^nF(M)$ la n-ième dérivée à droite du foncteur $F = \mathrm{Hom}_{B,G}(-, N)$. Si X est un B-module projectif, alors $P = B[G]\otimes_B X$ est un (B, G)-module projectif. En effet pour tout (B, G)-module N,

$$\mathrm{Hom}_{B,G}(B[G]\otimes_B M, N) \simeq \mathrm{Hom}_B(M, N)$$

Lemme 3.1.1 *Il existe un système de variables $(X_\alpha)_{\alpha\in\Upsilon}$, une action de G par permutation sur $(X_\alpha)_{\alpha\in\Upsilon}$ avec $\oplus_{\alpha\in\Upsilon}AX_\alpha$ (A, G)-projectif et une surjection de (A, G)-modules*

$$R = A[(X_\alpha)_{\alpha\in\Upsilon}] \xrightarrow{\mathfrak{p}} B$$

Preuve : Soit V un sous A-module de B, G-stable et qui engendre B comme A-algèbre. Soit P un (A, G)-module libre (donc projectif) de base $(Y_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ avec une surjection de (A, G)-module $P \twoheadrightarrow V$. Cette surjection induit une surjection G-équivariante

$$R = \mathrm{Sym}_A(P) \twoheadrightarrow B$$

Nous pouvons écrire $R = A[(X_\alpha)_{\alpha\in\Upsilon}]$, où l'ensemble des variables $(X_\alpha)_{\alpha\in\Upsilon}$ s'obtient en prenant $|G|$ copies $Y_{\gamma,g}$, $g\in G$ de chaque variable Y_γ, $\gamma\in\Gamma$. En écrivant $\alpha = (\gamma, g)$ et $g'\alpha = (\gamma, g'g)$, l'action de G sur $(X_\alpha)_{\alpha\in\Upsilon}$ vérifie $g\cdot X_\alpha = X_{g\alpha}$ et $\oplus_{\alpha\in\Upsilon}AX_\alpha$ est (A, G)-projectif (et même (A, G)-libre). ∎

Soit $R = A[(X_\alpha)_{\alpha\in\Upsilon}]$ défini par le lemme 3.1.1. Nous notons $R = A[X_\alpha]$ lorsqu'aucune confusion n'est possible. Soit I le noyau de $\mathfrak{p} : R \to B$

$$0 \to I \to R \xrightarrow{\mathfrak{p}} B \to 0$$

Comme les variables X_α sont permutées par G, le noyau I est un (R,G)-module. Soit F un (R,G)-module projectif avec une surjection (R,G)-linéaire $j : F \to I$. Notons Q le (R,G)-module noyau de j :

$$0 \to Q \to F \xrightarrow{j} I \to 0$$

Soit F_0 le sous-R-module de F engendré par les relations $j(x)y - j(y)x$ pour $x, y \in F$. Alors F_0 est un sous-(B,G)-module et la suite suivante est exacte

$$0 \to Q/F_0 \to F/F_0 \xrightarrow{j} R \to B \to 0 \tag{1}$$

La donnée d'une suite exacte de ce type est dite *G-présentation libre* de B/A. Cette présentation du (A,G)-module B est trés utile. Elle permet notamment de définir le *complexe cotangent G-équivariant*

$$Q/F_0 \to F \otimes_R B \to \Omega^1_{R/A} \otimes_R B \to 0$$

où $\Omega^1_{R/A}$ est le module des différentielles de la A-algèbre R. Lorsque nous oublions la structure de G-module, le complexe précédent s'identifie au complexe cotangent au sens de [LiSc]. Le lemme 3.1.1 permet de suivre les démonstrations de [LiSc] dans le cas G-équivariant et de montrer que la cohomologie du complexe tangent G-équivariant ne dépend pas de la G-présentation libre. Grâce aux deux lemmes suivants, nous identifions la cohomologie du complexe cotangent G-équivariant avec des groupes $\mathrm{Ext}^i_{B,G}$.

Lemme 3.1.2 *Les (B,G)-modules $F \otimes_R B$ et $\Omega^1_{R/A} \otimes_R B$ sont projectifs.*

PREUVE : Le (R,G)-module projectif F est facteur direct d'un (R,G)-module libre. Le module $F \otimes_B R$ est facteur direct d'un (B,G)-module projectif. Donc $F \otimes_R B$ est un (B,G)-module projectif.
Par définition du module des différentielles, il est facile de montrer l'isomorphisme G-équivariant suivant

$$\Omega^1_{R/A} \simeq R \otimes_A P$$

où $R = \mathrm{Sym}_A(P)$ (avec les notations du lemme 3.1.1) ; l'action de $A[G]$ sur $R \otimes_A P$ est l'action diagonale pour les éléments du groupe G étendue linéairement à $A[G]$. Pour établir la (B,G)-projectivité de $\Omega^1_{R/A} \otimes_R B$, il suffit donc de voir que $(R \otimes_A P) \otimes_R B$ est (B,G)-projectif. ∎

D'après [LiSc] Proposition 3.2.1, les suites de (B,G)-modules suivantes sont exactes :

$$0 \to I/I^2 \to \Omega^1_{R/A} \otimes_R B \to \Omega^1_{B/A} \to 0 \tag{2}$$

$$0 \to Q/F_0 \to F \otimes_R B \to I/I^2 \to 0 \tag{3}$$

pourvu que B soit une A-algèbre plate réduite essentiellement de type fini d'intersection complète relativement à A. De plus, nous avons alors $\mathrm{Ext}^2_B(\Omega^1_{B/A}, M)$ pour tout B-module M. Sous ces hypothèses, le lemme 3.1.3 donne une description des deux premiers groupes de cohomologie du complexe cotangent G-équivariant.

Lemme 3.1.3 *Supposons que B est une A-algèbre plate réduite essentiellement de type fini d'intersection complète relativement à A. Soit M un (B,G)-module. Alors*

$$\mathrm{Ext}^1_{B,G}(\Omega^1_{B/A}, M) \simeq \frac{\mathrm{Hom}_{B,G}(I/I^2, M)}{\mathrm{Hom}_{B,G}(\Omega^1_{R/A} \otimes_R B, M)}$$

$$\mathrm{Ext}^2_{B,G}(\Omega^1_{B/A}, M) \simeq \frac{\mathrm{Hom}_{B,G}(Q/F_0, M)}{\mathrm{Hom}_{B,G}(F \otimes_R B, M)}$$

Preuve : Comme B est une A-algèbre plate réduite essentiellement de type fini d'intersection complète relativement à A, la suite de (B,G)-module suivante est exacte

$$0 \to I/I^2 \to \Omega^1_{R/A} \otimes_R B \to \Omega^1_{B/A} \to 0 \tag{4}$$

Écrivons la suite exacte longue associée, $i \geq 1$

$$\to \mathrm{Ext}^i_{B,G}(\Omega^1_{R/A} \otimes B, M) \to \mathrm{Ext}^i_{B,G}(I/I^2, M) \to \mathrm{Ext}^{i+1}_{B,G}(\Omega^1_{B/A}, M) \to \mathrm{Ext}^{i+1}_{B,G}(\Omega^1_{R/A} \otimes B, M) \to$$

Comme $\Omega^1_{R/A} \otimes_A B$ est (B,G)-projectif (Lemme 3.1.2), $\mathrm{Ext}^i_{B,G}(\Omega^1_{R/A} \otimes B, M) = 0$ et

$$\mathrm{Ext}^i_{B,G}(I/I^2, M) \simeq \mathrm{Ext}^{i+1}_{B,G}(\Omega^1_{B/A}, M), \quad i = 0, 1$$

Les suites exactes de (B,G)-modules (4) et

$$0 \to Q/F_0 \to F \otimes_R B \to I/I^2 \to 0$$

et le fait que les (B,G)-modules $F \otimes_R B$ et $\Omega^1_{R/A} \otimes_A B$ sont projectifs (Lemme 3.1.2) permettent alors de conclure. ∎

3.2 Déformations équivariantes d'algèbres

Soit $A' \to A$ un homomorphisme d'anneaux surjectif de noyau J tel que $J^2 = 0$. Rappelons qu'une *G-déformation* de B/A à A' est une G-extension B'

$$0 \to B \otimes_A J \to B' \to B \to 0$$

telle que B' soit plat sur A'. Rappelons aussi le critère local de platitude ([Gr2])

Lemme 3.2.1 *Un A'-module B' est plat sur A' si et seulement les deux conditions suivantes sont satisfaites*
i. $B = B' \otimes_{A'} A$ est plat sur A
ii. $J \otimes_A B \to B'$ est injective.

Considérons une présentation libre G-équivariante

$$B = A[(X_\alpha)_{\alpha \in \Upsilon}]/I = A[(x_\alpha)_{\alpha \in \Upsilon}] \quad I = ((f_\gamma)_{\gamma \in \Gamma})$$

avec $\sigma(x_\alpha) = x_{\sigma(\alpha)}$ et $\sigma(f_\gamma) = f_{\sigma(\gamma)}$ pour tout $\alpha \in \Upsilon$, $\gamma \in \Gamma$ et $\sigma \in G$. L'action de G sur $A'[X_\alpha]$ et $A[X_\alpha]$ est l'action induite par $\sigma(X_\alpha) = X_{\sigma(\alpha)}$ et la surjection naturelle $A'[X_\alpha] \to A[X_\alpha]$ est G-équivariante. Notons f'_γ, la relation $f_\gamma \in A[X_\alpha]$ vue comme élément de $A'[X_\alpha]$. Écrivons $J = \sum_{\lambda \in \Lambda} A' t_\lambda$ et $B = A'[X_\alpha]/I'$. Ainsi $((f'_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}, (t_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ est un système de générateurs G-stables de I' comme (A', G)-module :

$$B = A'[X_\alpha]/(f'_\gamma, t_\lambda)$$

Soit $(V_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ (resp. $(T_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$) un système de variables G-stables (pour l'action de G relevée à I') indépendantes et soit

$$R = A[X_\alpha],\ F = \oplus_{\gamma \in \Gamma} R V_\gamma,\ R' = A'[X_\alpha],\ F' = (\oplus_{\gamma \in \Gamma} R' V_\gamma) \oplus (\oplus_{\lambda \in \Lambda} R' T_\lambda)$$

Nous avons donc une G-présentation libre de B/A (resp. de B/A') :

$$0 \to Q/F_0 \to F/F_0 \to R \to B \to 0$$

$$0 \to Q'/F'_0 \to F'/F'_0 \to R' \to B \to 0$$

L'obstruction aux G-déformations de B/A à A' est

$$\mathrm{obs}_{B/A}(A') = [\theta] \in \frac{\mathrm{Hom}_{B,G}(Q/F_0, J \otimes_A B)}{\mathrm{Hom}_{B,G}(F \otimes_R B, J \otimes_A B)} \simeq \mathrm{Ext}^2_{B,G}(\Omega^1_{B/A}, J \otimes_A B)$$

où $\theta : Q/F_0 \to J \otimes_A B$ est définie comme suit : un élément de Q est une relation entre les f_γ dans $A[X_\alpha]$:

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} a_\gamma f_\gamma = 0, \quad a_\gamma \in A$$

Relevons cette équation à Q' modulo F_0

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} g_\lambda t_\lambda + \sum_{\gamma\in\Gamma} a_\gamma f'_\gamma = 0 \text{ dans } A'[X_\alpha]$$

L'application θ est définie par

$$\theta : Q/F_0 \to J \otimes_A B, \quad \theta(\sum_{\gamma\in\Gamma} a_\gamma f_\gamma) = \sum_{\lambda\in\Lambda} g_\lambda (t_\lambda \otimes 1)$$

Le théorème suivant montre que l'élément $\mathrm{obs}_{B/A}(A')$ s'idenfie effectivement à une obstruction au sens suivant :

Théorème 3.2.2 *Soit $A' \to A$ une petite surjection de noyau J. Soit B une A-algèbre plate réduite essentiellement de type fini d'intersection complète relativement à A. Soit G un groupe fini de A-automorphismes de B.*
i. Alors B/A admet une G-déformation à A' si et seulement si

$$\mathrm{obs}_{B/A}(A') \in \mathrm{Ext}^2_{B,G}(\Omega^1_{B/A}, J \otimes_A B)$$

est nulle.
ii. Si $\mathrm{obs}_{B/A}(A') = 0$, l'ensemble des G-déformations de B/A à A' est un torseur sous $\mathrm{Ext}^1_{B,G}(\Omega^1_{B/A}, J \otimes_A B)$.

Preuve : i. Supposons que $\mathrm{obs}_{B/A}(A') = 0$. Cela signifie que θ est induite par une application (B,G)-linéaire

$$\theta_0 : \oplus_{\gamma\in\Gamma} BV_\gamma \to J \otimes_A B, \quad V_\gamma \mapsto \sum_{\lambda\in\Lambda} t_\lambda \otimes \phi_{\gamma,\lambda}$$

Pour construire une déformation G-équivariante de B/A à A', cherchons une perturbation des équations (f'_γ) de la forme

$$f'_\gamma + \psi_\gamma, \quad \psi_\gamma \in JA'[X_\alpha]$$

de telle façon que

$$B' = A'[X_\alpha]/(f'_\gamma + \psi_\gamma)$$

soit une G-déformation de B/A : B' doit être muni d'une action de G et B' doit être plat sur A. Choississons $\psi_\gamma = \sum_{\lambda\in\Lambda} t_\lambda \phi_{\gamma,\lambda}$. Montrons que B' est alors plat sur A. D'après le critère de platitude 3.2.1, il suffit de montrer que $J \otimes B' \to B'$ est injective. Soit $\sum_{\lambda\in\Lambda} t_\lambda \otimes \bar{b}_\lambda \in J \otimes_{A'} B'$, avec $\bar{b}_\lambda \in A'[X_\alpha]/(f'_\gamma + \psi_\gamma)$ et b_λ un relevé dans $A'[X_\alpha]$. Dire que l'image de $\sum_{\lambda\in\Lambda} t_\lambda \otimes \bar{b}_\lambda$ est nulle par $J\otimes_{A'} B' \to B'$, signifie qu'il existe $c_\gamma \in A'[X_\alpha]$ tels que

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} t_\lambda b_\lambda = \sum_{\gamma\in\Gamma} c_\gamma (f'_\gamma + \psi_\gamma)$$

Donc $\sum_{\lambda\in\Lambda} t_\lambda b_\lambda - \sum_{\gamma\in\Gamma} c_\gamma (f'_\gamma + \psi_\gamma) \in Q'$. D'où en notant encore b_λ (resp. c_γ) l'image de b_λ (resp. c_γ) dans $A[X_\alpha]$,

$$\theta(\sum_{\gamma\in\Gamma} c_\gamma f_\gamma) = \sum_{\lambda\in\Lambda} b_\lambda (t_\lambda\otimes 1) + \sum_{\gamma\in\Gamma,\lambda\in\Lambda} \phi_{\gamma,\lambda} c_\gamma (t_\lambda \otimes 1)$$

Or $\theta(\sum_{\gamma\in\Gamma} c_\gamma f_\gamma) = \sum_{\gamma\in\Gamma} \phi_\gamma c_\gamma$ donc $\sum b_\lambda (t_\lambda \otimes 1) = 0$ et $J\otimes B' \to B'$ est injective. En utilisant la (B,G)-linéarité de θ_0, nous vérifions que l'action de G est bien définie sur B'.

Réciproquement si $B' = A'[X_\alpha]/(f'_\gamma + \psi_\gamma)$ est une G-déformation de B/A à A'. Écrivons $\psi_\gamma = \sum_{\lambda\in\Lambda} t_\lambda \phi_{\gamma,\lambda}$. Alors tout élément $\sum_{\gamma\in\Gamma} a_\gamma f_\gamma$ de Q se relève à Q' modulo F_0 sous la forme $\sum_{\gamma\in\Gamma} a_\gamma (f'_\gamma + \psi_\gamma)$. Donc l'application θ est définie par

$$\theta : Q/F_0 \to J\otimes_A B,\ \ \theta(\sum_{\gamma\in\Gamma} a_\gamma f_\gamma) = \sum_{\lambda\in\Lambda,\gamma\in\Gamma} \phi_{\gamma,\lambda}(t_\lambda\otimes 1)$$

Cette application est induite par l'application $\theta_0 : \oplus_{\gamma\in\Gamma} BV_\gamma \to J\otimes_A B,\quad V_\gamma \mapsto \sum_{\lambda\in\Lambda} t_\lambda \otimes \phi_{\gamma,\lambda}$ qui est (B,G)-linéaire car B' est une G-déformation de B/A à A'. D'où $\mathrm{obs}_{B/A}(A') = 0$.

ii. Soit B' une G-déformation de B/A à A', $B' = A'[X_\alpha]/(f'_\gamma)$. Toute déformation de B/A à A' peut s'écrire

$$A'[X_\alpha]/(f'_\gamma + \phi_\gamma) \quad \phi_\gamma \in JA'[X_\alpha]$$

où (ϕ_γ) est une famille G-stable. La condition de platitude implique que l'application $\bar{\phi} : I/I^2 \to J\otimes_A B$ induite par $f_\gamma \mapsto \bar{\phi}_\gamma$ est (B,G)-linéaire. Réciproquement soit

$$[\bar{\phi}] \in \frac{\mathrm{Hom}_{B,G}(Q/F_0, M)}{\mathrm{Hom}_{B,G}(F\otimes_R B, M)} \simeq \mathrm{Ext}^1_{B,G}(\Omega^1_{B,G}, J\otimes_A B)$$

admettant $\phi : I/I^2 \to J\otimes_A B$, $f_\gamma \mapsto \bar{\phi}_\gamma$ comme représentant. Soit ϕ_γ un relèvement de $\bar{\phi}_\gamma$ à $JA'[X_\alpha]$. Alors $A'[X_\alpha]/(f'_\gamma + \phi_\gamma)$ est une G-déformation de B/A à A'. Donc l'ensemble des G-déformations de B/A à A' est un torseur sous $\mathrm{Ext}^1_{B,G}(\Omega^1_{B/A}, J\otimes_A B)$. ∎

3.3 Dévissage spectral des groupes $\mathrm{Ext}^i_{B,G}(\Omega_{B/A}, M)$

Soit M un (B,G)-module. Nous supposons, comme dans §3.2, que B est une A-algèbre plate réduite essentiellement de type fini d'intersection complète relativement à A. Considérons la suite spectrale

$$E_2^{p,q} = H^p(G, \mathrm{Ext}^q_B(\Omega^1_{B/A}, M)) \Rightarrow \mathrm{Ext}^{p+q}_{B,G}(\Omega^1_{B/A}, M) \tag{5}$$

Précisons les suites exactes de bas degrés associées à cette suite spectrale.

Lemme 3.3.1 *La suite suivante est exacte*

$$0 \to H^1(G,\Theta) \to \mathrm{Ext}^1_{B,G}(\Omega^1_{B/A}, M) \to H^0(G, \mathrm{Ext}^1_B(\Omega^1_{B/A}, M)) \to H^2(G,\Theta) \tag{6}$$

où $\Theta = \mathrm{Hom}_B(\Omega^1_{B/A}, M)$.

Preuve : La filtration sur l'aboutissement de la suite spectrale (5), conduit à la suite exacte

$$0 \to E_\infty^{1,0} \to \mathrm{Ext}^1_{B,G}(\Omega^1_{B/A}, M) \to E_\infty^{0,1} \to 0 \tag{7}$$

Il est immédiat que $E_\infty^{1,0} = E_2^{1,0} = H^1(G, \mathrm{Hom}_B(\Omega^1_{B/A}, M))$ et que $E_\infty^{0,1} = E_3^{0,1} = \ker\left(H^0(G, \mathrm{Ext}^1_B(\Omega^1_{B/A}, M)) \to H^2(G, \mathrm{Hom}_B(\Omega^1_{B/A}, M))\right)$. En identifiant les termes de la suite (7), nous obtenons le résultat annoncé. ■

Lemme 3.3.2 *La suite suivante est exacte*

$$\begin{aligned} H^0(G, \mathrm{Ext}^1_B(\Omega^1_{B/A}, M)) \to H^2(G,\Theta) &\to \mathrm{Ext}^2_{B,G}(\Omega^1_{B/A}, M) \\ &\to H^1(G, \mathrm{Ext}^1_B(\Omega^1_{B/A}, M)) \to H^3(G,\Theta) \end{aligned}$$

où $\Theta = \mathrm{Hom}_B(\Omega^1_{B/A}, M)$.

Preuve : D'après la suite spectrale (5), nous avons la filtration décroissante

$$\mathrm{Ext}^2_{B,G}(\Omega^1_{B/A}, M) = F^0 \supset F^1 \supset F^2 \supset 0$$

Avec les hypothèses sur l'algèbre B, nous avons $F^0/F^1 = 0$ car $\mathrm{Ext}^2_B(\Omega^1_{B/A}, M) = 0$. Il est facile de montrer que

$$F^1/F^2 = E_\infty^{1,1} = E_3^{1,1} = \ker\left(H^1(G, \mathrm{Ext}^1_B(\Omega^1_{B/A}, M)) \to H^3(G, \mathrm{Hom}_B(\Omega^1_{B/A}, M))\right)$$

Enfin $F^2 = E_\infty^{2,0}$ est le conoyau de $E_2^{0,1} \to E_2^{2,0}$, ce qui, compte tenu de l'identification de ces termes, conduit à la suite exacte annoncée. ■

3.4 Déformations équivariantes locales

Revenons aux déformations G-équivariantes locales au point $x \in C$. Comme C est une k-courbe génériquement lisse localement d'intersection complète, $\mathcal{O}_x = \widehat{\mathcal{O}}_{C,x}$ est une k-algèbre d'intersection complète (plate) génériquement lisse et formellement de type fini. Le formalisme précédent (§3.2) s'applique à cette situation. Notons G_x le stabilisateur de x. Le *foncteur des déformations G_x-équivariantes au point x* est

$$D_x : \mathcal{C} \to \mathrm{Ens}, \quad A \mapsto \{G_x\text{-déformations de la } k\text{-algèbre } \mathcal{O}_x\}$$

Le théorème 3.2.2 s'adaptent au cas où $\mathcal{O}_x$ est formellement de type fini sur k en prenant le module des différentielles complété $\widehat{\Omega}^1_{\mathcal{O}_x/k}$. Les obstructions aux déformations appartiennent au groupe $\mathrm{Ext}^2_{\mathcal{O}_x,G}(\widehat{\Omega}^1_{\mathcal{O}_x/k}, \mathcal{O}_x)$. L'existence de la déformation triviale de $\mathcal{O}_x/k$ à $k[\varepsilon]$ montre que $\mathrm{obs}_{\mathcal{O}_x/k}(k[\varepsilon]) = 0$. Nous avons donc l'isomorphisme

$$D_x(k[\varepsilon]) \simeq \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_x,G}(\widehat{\Omega}^1_{\mathcal{O}_x/k}, \mathcal{O}_x)$$

Les hypothèses du critère de Schlessinger ([Sc] §3.7) étant satisfaites, le foncteur des déformations G_x-équivariantes au point x admet donc un anneau versel R_x de déformations. L'objet du paragraphe suivant est de montrer que l'anneau versel R_{gl} de déformations G-équivariantes globales de C ne dépend que des anneaux versels de déformations aux points singuliers et aux points de ramification sauvage de C (Théorème 4.1.3).

4 Principe local-global

4.1 Énoncé du principe local-global

Soit $y_1, \ldots, y_r$ les images des points singuliers et des points de ramification sauvage de $C \to C/G$. Pour $1 \leq i \leq r$, notons x_i un point au-dessus de y_i et G_{x_i} son stabilisateur (éventuellement trivial pour un point singulier). Définissons le *foncteur des déformations G-équivariantes locales*

$$D_{\mathrm{loc}} = \prod_{1 \leq i \leq r} D_{x_i}$$

où D_{x_i} est le foncteur des déformations G_{x_i}-équivariantes au point x_i (voir §3.4). Le choix du point x_i est sans importance, car si nous changeons x_i en autre point x_i' de son orbite sous G, nous obtenons un foncteur $D_{G_{x_i'}}$ isomorphe à $D_{G_{x_i}}$. Par localisation en ces points, nous définissons un morphisme

$$\phi : D_{\mathrm{gl}} \to D_{\mathrm{loc}}$$

qui à une déformation G-équivariante globale de C à A objet de $\mathcal{C}$ associe les déformations G_{x_i}-équivariantes aux points $x_i, 1 \leq i \leq r$ à A. D'après §3.4, l'espace tangent (resp.

le groupe d'obstruction) au foncteur $D_{\rm loc}$ est $\prod_{1\leq i\leq r}\mathrm{Ext}^j_{\mathcal{O}_{x_i},G_{x_i}}(\widehat{\Omega}^1_{\mathcal{O}_{x_i}/k},\mathcal{O}_{x_i})$ pour $j=1$ (resp. $j=2$).

Notons $\pi : C\to C/G$ et pour F un $(G,\mathcal{O}_C)$-module, $\pi_*^G(F)$ le faisceau sur C/G défini par $\pi_*^G(F)(V)=\Gamma(\pi^{-1}(V),F)^G$, pour V ouvert de C/G. Le foncteur exacte à gauche

$$Hom_{\mathcal{O}_C,G}(\Omega^1_{\mathcal{O}_C,G},-)=\pi_*^G(\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_C,G}(\Omega^1_{\mathcal{O}_C,G},-))$$

définit par dérivation les faisceaux sur C/G

$$Ext^n_{\mathcal{O}_C,G}(\Omega^1_{\mathcal{O}_C,G},\mathcal{O}_C),\ n\in\mathbf{N}$$

D'après [Gr1] 5.6.9, la fibre en un point $y=\pi(x)\in C/G$ de $Ext^n_{\mathcal{O}_C,G}(\Omega^1_{\mathcal{O}_C,G},\mathcal{O}_C)$ est

$$Ext^n_{\mathcal{O}_C,G}(\Omega^1_{C/k},\mathcal{O}_C)_{y=\pi(x)}\simeq \mathrm{Ext}^n_{\mathcal{O}_x,G_x}(\widehat{(\Omega^1_{C/k})_x},\mathcal{O}_x)\tag{8}$$

Grothendieck établit également l'existence d'une suite spectrale ([Gr1] Théorème 5.6.3)

$$E_2^{p,q}=H^p(C/G,Ext^q_{\mathcal{O}_C,G}(\Omega^1_{\mathcal{O}_C/k},\mathcal{O}_C))\Longrightarrow \mathbf{Ext}^{p+q}_{\mathcal{O}_C,G}(\Omega^1_{\mathcal{O}_C/k},\mathcal{O}_C)\tag{9}$$

Lemme 4.1.1 *L'application*

$$\mathbf{Ext}^1_{\mathcal{O}_C,G}(\Omega^1_{\mathcal{O}_C/k},\mathcal{O}_C)\to\prod_{1\leq i\leq r}\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{x_i},G_{x_i}}(\widehat{\Omega}_{\mathcal{O}_{x_i}/k},\mathcal{O}_{x_i})$$

est surjective de noyau $H^1(C/G,Hom_{\mathcal{O}_C,G}(\Omega^1_{\mathcal{O}_C/k},\mathcal{O}_C))$.

Preuve : Considérons la suite spectrale (9) en degré total $p+q=1$. En constatant que $E_2^{2,0}=H^2(C/G,Hom_{\mathcal{O}_C,G}(\Omega^1_{\mathcal{O}_C/k},\mathcal{O}_C))=0$, $E_2^{0,1}=E_\infty^{0,1}$ et $E_2^{1,0}=E_\infty^{1,0}$, nous obtenons la suite exacte

$$0\to H^1(C/G,Hom_{\mathcal{O}_C,G}(\Omega^1_{\mathcal{O}_C/k},\mathcal{O}_C))\to\mathbf{Ext}^1_{\mathcal{O}_C,G}(\Omega^1_{\mathcal{O}_C/k},\mathcal{O}_C)$$

$$\to H^0(C/G,Ext^1_{\mathcal{O}_C,G}(\Omega^1_{\mathcal{O}_C/k},\mathcal{O}_C))\to 0\tag{10}$$

Le faisceau $Ext^1_{\mathcal{O}_C,G}(\Omega^1_{\mathcal{O}_C/k},\mathcal{O}_C)$ est à support dans $\{y_1,\dots,y_r\}$. D'après (8), nous avons donc

$$H^0(C/G,Ext^1_{\mathcal{O}_C,G}(\Omega^1_{\mathcal{O}_C/k},\mathcal{O}_C))\simeq\prod_{1\leq i\leq r}\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{x_i},G_{x_i}}(\widehat{\Omega}^1_{\mathcal{O}_{x_i}/k},\mathcal{O}_{x_i})$$

Le lemme découle alors de l'identification de ce terme dans la suite exacte (10). ∎

Le noyau $\ker\phi$ du morphisme de foncteurs $\phi : D_{\mathrm{gl}} \to D_{\mathrm{loc}}$ s'interprète en égale caractéristique comme le foncteur des déformations localement triviales : soit A un k-espace vectoriel de $\mathcal{C}$. Une déformation G-équivariante globale de C à A est *localement triviale* si pour tout point x_i, $1 \leq i \leq r$ la déformation G_{x_i}-équivariante induite est la déformation triviale. Le groupe $H^1(C/G, Hom_{\mathcal{O}_C,G}(\Omega_{\mathcal{O}_C/k}, \mathcal{O}_C))$ s'interprète alors comme l'espace tangent au foncteur $\ker\phi$.

Lemme 4.1.2 *Les groupes d'obstructions aux foncteurs D_{gl} et D_{loc} sont isomorphes.*

PREUVE : Considérons le terme de degré total $p+q=2$ de la suite spectrale (9). Le terme $E_2^{2,0}$ est nul (voir preuve du lemme 4.1.1). Comme $Ext^1_{\mathcal{O}_C,G}(\Omega^1_{\mathcal{O}_C/k}, \mathcal{O}_C)$ est à support fini, $E_2^{1,1} = H^1(C/G, Ext^1_{\mathcal{O}_C,G}(\Omega^1_{\mathcal{O}_C/k}, \mathcal{O}_C)) = 0$; nous obtenons l'isomorphisme

$$\mathbf{Ext}^2_{\mathcal{O}_C,G}(\Omega^1_{\mathcal{O}_C/k}, \mathcal{O}_C) \xrightarrow{\sim} H^0(C/G, Ext^2_{\mathcal{O}_C,G}(\Omega^1_{\mathcal{O}_C/k}, \mathcal{O}_C))$$

Le faisceau $Ext^2_{\mathcal{O}_C,G}(\Omega^1_{\mathcal{O}_C/k}, \mathcal{O}_C)$ est à support dans $\{y_1, \dots, y_r\}$. Donc, d'après (8), $H^0(C/G, Ext^2_{\mathcal{O}_C,G}(\Omega^1_{\mathcal{O}_C/k}, \mathcal{O}_C)) \simeq \prod_{1\leq i\leq r} \mathrm{Ext}^2_{\mathcal{O}_{x_i},G_{x_i}}(\widehat{\Omega}_{\mathcal{O}_{x_i}/k}, \mathcal{O}_{x_i})$ et l'isomorphisme annoncé

$$\mathbf{Ext}^2_{\mathcal{O}_C,G}(\Omega^1_{\mathcal{O}_C/k}, \mathcal{O}_C) \xrightarrow{\sim} \prod_{1\leq i\leq r} \mathrm{Ext}^2_{\mathcal{O}_{x_i},G_{x_i}}(\widehat{\Omega}_{\mathcal{O}_{x_i}/k}, \mathcal{O}_{x_i})$$

∎

Avec les lemmes 4.1.2 et 4.1.1, la preuve du principe local-global suivant est formellement identique à celle du théorème 3.3.4 [BeMé].

Théorème 4.1.3 *Le morphisme $\phi : D_{\mathrm{gl}} \to D_{\mathrm{loc}}$ est lisse.*

En termes d'anneaux versels de déformations, le théorème 4.1.3 s'exprime de la façon suivante:

Corollaire 4.1.4 *Soit R_i l'anneau versel de déformations de D_{x_i} et R_{gl} l'anneau versel de déformations de D_{gl}. Alors*

$$R_{\mathrm{gl}} = (R_1 \widehat{\otimes} \cdots \widehat{\otimes} R_r)[[U_1, \dots, U_N]]$$

avec $N = \dim_k H^1(C/G, Hom_{\mathcal{O}_C,G}(\Omega^1_{\mathcal{O}_C/k}, \mathcal{O}_C))$.

4.2 Revêtements et épaississements des revêtements galoisiens

Comme application immédiate du principe local-global (Corollaire 4.1.4) nous obtenons le résultat suivant concernant le relèvement en caractéristique zéro (voir [He]). Les notations sont les mêmes que dans le paragraphe précédent (§4.1).

Théorème 4.2.1 *Soit R un anneau de valuation discrète complet qui domine $W(k)$. Le revêtement galoisien $C \to C/G$ admet un relèvement à R si et seulement si pour tout point $x \in C$ avec groupe d'inertie G_x non trivial, l'action de G_x sur $\widehat{\mathcal{O}}_{C,x}$ se relève à R.*

PREUVE : Supposons que la courbe C admette un relèvement C' équivariant à R. Alors l'action de G_x sur $\widehat{\mathcal{O}}_{C,x}$ se relève en une action de G_x sur $\widehat{\mathcal{O}}_{C',x}$.
Réciproquement C étant une courbe projective, la déformation équivariante de C est algébrisable ([Gr3]). Pour obtenir un relèvement équivariant de C à R, il suffit donc d'avoir un morphisme d'anneaux locaux $R_{\mathrm{gl}} \to R$. D'après la structure de R_{gl} (Corollaire 4.1.4), il suffit d'avoir des morphismes $R_i \to R$, $1 \leq i \leq r$. Ces morphismes existent car, par hypothèse, en tout point x de C, l'action de G_x sur $\widehat{\mathcal{O}}_{C,x}$ se relève. ∎

Nous pouvons espérer retrouver de même les théorèmes d'épaississement d'Harbater et Stevenson ([HaSt]) qui sont en fait des résultats de déformations équivariantes en égale caractéristique. Pour obtenir ces théorèmes, il faut se limiter aux épaississements à $k[[T]]$, comme dans [HaSt], pour pouvoir utiliser des résultats de rigidité d'Artin et Hironoka-Rossi (voir [Ar2]).

5 Déformations G-équivariantes des courbes semi-stables

Nous supposons dorénavant que C est une k-courbe semi-stable. Rappelons qu'une *courbe semi-stable* est une courbe réduite connexe dont les points singuliers sont des points doubles ordinaires. L'objet de ce paragraphe est la description des espaces tangents aux foncteurs des déformations G-équivariantes locales et globales de C.

5.1 Déformations G-équivariantes du point double

Soit $x \in C$ un point double. Alors

$$\mathcal{O} = \widehat{\mathcal{O}}_{C,x} \simeq \frac{k[[x,y]]}{(xy)}$$

Le groupe d'inertie G_x au point x est un groupe fini d'automorphisme $G_x \subset \operatorname{Aut}\mathcal{O}$. Lorsqu'aucune confusion n'est possible, nous notons G pour G_x. Nous allons interpréter en termes de déformations la suite exacte (6) décrivant l'espace tangent aux déformations G_x-équivariantes du point double $D_{\mathcal{O},G}(k[\varepsilon]) \simeq \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O},G}(\widehat{\Omega}^1_{\mathcal{O}/k}, \mathcal{O})$. Commençons par une remarque sur les automorphismes de $\frac{A[[x,y]]}{(xy-a)}$ pour A un objet de $\mathcal{C}$ et $a \in \mathcal{M}_A$.

Lemme 5.1.1 *Soit $\Delta(x,y) = xy - a$. Pour tout $F \in A[[x,y]]$ il existe un écriture unique sous la forme*

$$F(x,y) = H(x,y)\Delta(x,y) + \phi(x) + \psi(y)$$

avec $H \in A[[x,y]]$, $\phi \in A[[x]]$ et $\psi \in A[[y]]$.

Preuve : L'existence d'une telle écriture est claire. Pour établir l'unicité soit $H(x,y) = \sum_{p,q\in\mathbf{N}} h_{p,q}x^py^q \in A[[x,y]]$ tel que $H(x,y)\Delta(x,y) = \phi(x) + \psi(y)$. Alors

$$\sum_{p,q\in\mathbf{N}} h_{p,q}x^{p+1}y^{q+1} - \sum_{p,q\in\mathbf{N}} ah_{p,q}x^py^q = \phi(x) + \psi(y)$$

Donc pour tout $p,q \in \mathbf{N}$, $h_{p,q} = ah_{p+1,q+1}$. Par récurrence, pour tout $l > 0$ $h_{p,q} = a^l h_{p+l,q+l}$. Comme l'anneau A est séparé pour la topologie $\mathcal{M}_A$-adique, $h_{p,q} = 0$, $p,q \in \mathbf{N}$, $H = 0$. ∎

Soit $\sigma \in G$ un automorphisme de $\mathcal{O}$ qui préserve les branches. D'après le lemme 5.1.1, il est défini par linéarité par

$$\sigma(x) = xU(x), \sigma(y) = yV(y), \quad \text{avec } U(x) = \sum_{i\geq 0} U_ix^i, \quad V(y) = \sum_{i\geq 0} V_iy^i$$

Pour étudier $D_{\mathcal{O},G}(k[\varepsilon])$, décrivons les relèvements de σ à $\frac{k[\varepsilon][[x,y]]}{(xy-t\varepsilon)}$. Un tel relèvement $\tilde{\sigma}$ s'écrit

$$\tilde{\sigma}(x) = x\tilde{U}(x) + t\varepsilon S(y), \quad \tilde{\sigma}(y) = y\tilde{V}(y) + t\varepsilon T(x)$$

avec $S(y) \in k[[y]]$, $T(x) \in k[[x]]$, $\tilde{U}(x) \in k[\varepsilon][[x]]$, $\tilde{V}(y) \in k[\varepsilon][[y]]$ tels que modulo (t), $\tilde{U}(x) \equiv U(x)$ et $\tilde{V}(y) \equiv V(y)$. De plus l'automorphisme $\tilde{\sigma}$ doit satisfaire $\tilde{\sigma}(xy - t\varepsilon) \subset (xy - t\varepsilon)$. Or

$$\tilde{\sigma}(xy - t\varepsilon) = (x\tilde{U}(x) + t\varepsilon T(y))(y\tilde{V}(y) + t\varepsilon S(x)) - t\varepsilon$$

Modulo $(xy - t\varepsilon)$ nous obtenons $\tilde{\sigma}(xy - t\varepsilon) \equiv$

$$t\varepsilon(U_0V_0 - 1) + xt\varepsilon\Big(U(x)S(x) + V_0\sum_{i\geq 0} U_{i+1}x^i\Big) + yt\varepsilon\Big(V(y)T(y) + U_0\sum_{i\geq 0} V_{i+1}y^i\Big) \qquad (11)$$

D'où

Lemme 5.1.2 *L'automorphisme σ se relève en un automorphisme $\tilde{\sigma}$ de $\frac{k[\varepsilon][[x,y]]}{(xy-t\varepsilon)}$ si et seulement si $t = 0$ ou si $U_0V_0 = 1$.*

Preuve : Supposons $t \neq 0$, d'après (11) la condition $U_0V_0 = 1$ est nécessaire. Elle est suffisante car l'automorphisme $\tilde{\sigma}$ défini par

$$S(x) = \frac{-V_0 \sum_{i \geq 0} U_{i+1} x^i}{U(x)}, \quad T(x) = \frac{-U_0 \sum_{i \geq 0} V_{i+1} y^i}{V(y)} \text{ et } \tilde{U}(x) = U(x), \tilde{V}(y) = V(y)$$

est un relèvement de σ à $\frac{k[\varepsilon][[x,y]]}{(xy - t\varepsilon)}$ ($U(x)$ et $V(y)$ sont inversibles car $U_0V_0 = 1$). ∎

Remarque 5.1.3 Supposons que les hypothèses du lemme 5.1.2 soient satisfaites. Alors il existe $\tilde{\sigma}$ un relèvement de σ à $\frac{k[\varepsilon][[x,y]]}{(xy - t\varepsilon)}$. Un autre relèvement $\tilde{\sigma}'$ de σ s'obtient à partir de $\tilde{\sigma}$ par

$$\tilde{\sigma}'(x) = \tilde{\sigma}(x) + t\varepsilon x U'(x), \quad \tilde{\sigma}'(y) = \tilde{\sigma}(y) + t\varepsilon y V'(y)$$

pour $U'(x) \in k[[x]]$, $V'(y) \in k[[y]]$.

Remarque 5.1.4 Si le groupe d'inertie est un p-groupe, la condition $U_0V_0 = 1$ est toujours satisfaite. Dans le cas modéré cette condition correspond à l'hypothèse sous laquelle il est possible de lissifier l'action (modérée) de G ([Ek],[Sa]). Nous verrons (§5.2) que cette hypothèse revient à supposer que l'action de G est triviale sur l'espace tangent aux deformations infinitésimales du point double.

5.2 Déformations infinitésimales du point double

Un relèvement de $\mathcal{O}$ à A est la donnée d'une A-algèbre plate R avec un morphisme $R \xrightarrow{\alpha} R \otimes_A k \simeq \mathcal{O}$. Une déformation de $\mathcal{O}$ à A est une classe d'équivalence de tels relèvements : R et R' sont équivalents s'il existe un A-isomorphisme $\phi : R \xrightarrow{\sim} R'$ avec

$$\begin{tikzcd} R \arrow[rr, "\phi", "\sim"'] \arrow[dr, "\alpha"'] & & R' \arrow[dl, "\alpha'"] \\ & \mathcal{O} & \end{tikzcd}$$

Par définition le *foncteur des déformations infinitésimales du point double* est

$$F : \mathcal{C} \to \text{Ens}, \quad A \mapsto \{\text{déformations de } \mathcal{O} \text{ à } A\}$$

D'après [DeMu], ce foncteur des déformations infinitésimales du point double a une déformation effective à l'anneau versel $\frac{W(k)[[x,y,t]]}{(xy-t)}$: toute déformation à A objet de $\mathcal{C}$ est isomorphe à la classe d'équivalence de $\left(\frac{A[[x,y]]}{(xy-a)}, \alpha\right)$, pour un $a \in \mathcal{M}_A$, l'application α étant induite par l'application canonique $A \to A/\mathcal{M}_A \simeq k$. L'espace tangent au foncteur F est ([Ar1])

$$F(k[\varepsilon]) \simeq \operatorname{Ext}^1_{\mathcal{O}}(\widehat{\Omega}^1_{\mathcal{O}/k}, \mathcal{O}) \simeq k$$

Étudions l'action de G sur $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}/k}(\widehat{\Omega}^1_{\mathcal{O}/k}, \mathcal{O})$. Une déformation de $k[[x,y]]/(xy)$ à $k[\varepsilon]$ est une classe d'équivalence de relèvement de la forme

$$\mathcal{O}_h = k[\varepsilon][[x,y]]/(xy - \varepsilon h(x,y)) \quad h(x,y) \in k[[x,y]]$$

Deux relèvements $\mathcal{O}_h$ et $\mathcal{O}_{h'}$ sont équivalents si $h(0,0) = h'(0,0)$. Il suffit donc de considérer les relèvements de la forme

$$\mathcal{O}_t = k[\varepsilon][[x,y]]/(xy - t\varepsilon), \quad t \in k$$

Le groupe G agit sur l'espace tangent des déformations infinitésimales du point double $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}}(\widehat{\Omega}^1_{\mathcal{O}/k}, \mathcal{O})$. L'action sur $[\mathcal{O}_t, \alpha_t : \mathcal{O}_t \to \mathcal{O}]$ est définie par

$$\sigma[\mathcal{O}_t, \alpha_t] = [\mathcal{O}_t, \sigma\alpha_t], \quad \sigma \in G$$

Supposons que l'action de G préserve les branches. Un élément $\sigma \in G$ vu comme automorphisme de $\mathcal{O}$ s'écrit

$$\sigma(x) = xU(x),\ \sigma(y) = yU(y) \text{ avec } U(x) = \sum_{i \geq 0} U_i x^i,\ V(y) = \sum_{i \geq 0} V_i y^i$$

Comme $\sigma(xy - t\varepsilon) = U_0V_0(xy - U_0^{-1}V_0^{-1}t\varepsilon) +$ termes de plus haut degré, σ agit sur l'espace tangent par la multiplication par $(U_0V_0)^{-1}$. L'hypothèse du lemme 5.1.2 consiste donc à supposer que l'action de G sur $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}}(\widehat{\Omega}_{\mathcal{O}/k}, \mathcal{O})$ est triviale.

Dorénavant, nous supposons que l'action de G préserve les branches et est triviale sur l'espace tangent.

5.3 Interprétation du dévissage spectral

Nous donnons une interprétation en termes de déformations de la suite exacte décrivant l'espace tangent $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O},G}(\Omega_{\mathcal{O}/k}, \mathcal{O})$ (Lemme 3.3.1)

$$0 \to H^1(G, \Theta) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O},G}(\widehat{\Omega}^1_{\mathcal{O}/k}, \mathcal{O}) \to H^0(G, \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}}(\widehat{\Omega}^1_{\mathcal{O}/k}, \mathcal{O})) \to H^2(G, \Theta)$$

où $\Theta = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\widehat{\Omega}^1_{\mathcal{O}/k}, \mathcal{O})$. D'après §5.2, $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}}(\widehat{\Omega}_{\mathcal{O}/k}, \mathcal{O})$ est l'espace tangent au foncteur des déformations infinitésimales du point double. Comme l'action de G est supposée triviale $H^0(G, \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}}(\widehat{\Omega}^1_{\mathcal{O}/k}, \mathcal{O})) \simeq \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}}(\widehat{\Omega}_{\mathcal{O}/k}, \mathcal{O})$.

Pour interpréter le terme $H^1(G, \Theta)$, introduisons G_x, G_y les restrictions de G sur les branches respectives de paramètres x et y. Alors

Lemme 5.3.1 *Comme G-module,*

$$\Theta \simeq xk[[x]]\frac{\partial}{\partial x} \oplus yk[[y]]\frac{\partial}{\partial y}$$

où $k[[x]]\frac{\partial}{\partial x}$ (resp. $k[[y]]\frac{\partial}{\partial y}$) est le $k[[x]]$-module (resp. le $k[[y]]$-module) des champs de vecteurs formels sous G_x (resp. G_y).

Preuve : Par définition $\Theta = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\widehat{\Omega}^1_{\mathcal{O}/k}, \mathcal{O})$. Or

$$\widehat{\Omega}^1_{\mathcal{O}/k} \simeq \frac{k[[x,y]]dx \oplus k[[x,y]]dy}{(xdy + ydx)}$$

Donc

$$\Theta = \Big\{p\frac{\partial}{\partial x} + q\frac{\partial}{\partial y}, p, q \in \mathcal{O}, yp(x,y) + xq(x,y) = 0\Big\}$$

Écrivons $p(x,y) = p_1(x) + p_2(y)$, $q(x,y) = q_1(x) + q_2(y)$ avec $p_2(0) = q_1(0) = 0$. Alors

$$yp(x,y) + xq(x,y) = yp_1(x) + yp_2(y) + xq_1(x) + xq_2(y) = 0 \in \frac{k[[x,y]]}{(xy)}$$

Ainsi $p_2(y)$ et $q_1(x)$ sont constants, donc nuls ; et $p_1(0) = q_2(0) = 0$. D'où $p \in xk[[x]]$ et $q \in yk[[y]]$. ∎

Remarque 5.3.2 Rappelons que dans le cas d'un point x régulier, les déformations G_x-équivariantes ont pour espace tangent $H^1(G_x, k[[x]]\frac{d}{dx})$. Il est donc naturel d'interpréter le terme $H^1(G,\Theta)$ comme la contribution des déformations équivariantes de chacune des branches aux déformations équivariantes du point double.

Pour tout $\sigma \in G$, notons

$$\sigma(x) = f_\sigma(x) = xU_\sigma(x) = x\sum_{i\geq 0} U_{\sigma,i}x^i, \quad \sigma(y) = g_\sigma(y) = yV_\sigma(y) = y\sum_{i\geq 0} v_{\sigma,i}y^i$$

vu comme élément de $\mathrm{Aut}(k[[x,y]]/(xy))$. Soit $\alpha_\sigma = \frac{V_{\sigma,0}}{U_{\sigma,0}}U_{\sigma,1}$ $\beta_\sigma = \frac{U_{\sigma,0}}{V_{\sigma,0}}V_{\sigma,1}$ pour $\sigma \in G$. Définissons $[c_1] \in H^2(G,\Theta)$ comme la classe de $c_1 : G^2 \to \Theta$, avec

$$c_1(\sigma,\tau) = \Big(\frac{\beta_{\sigma\tau}}{f'_{\sigma\tau}(x)} - \sigma\Big(\frac{\beta_\tau}{f'_\tau(x)}\Big) - \frac{\beta_\sigma}{f'_\sigma(x)}\Big)\frac{\partial}{\partial x} + \Big(\frac{\alpha_{\sigma\tau}}{g'_{\sigma\tau}(y)} - \sigma\Big(\frac{\alpha_\tau}{g'_\tau(y)}\Big) - \frac{\alpha_\sigma}{g'_\sigma(y)}\Big)\frac{\partial}{\partial y}$$

Lemme 5.3.3 *Le morphisme* $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}}(\widehat{\Omega}^1_{\mathcal{O}/k}, \mathcal{O}) \to H^2(G,\Theta)$ *est nul si et seulement si la classe* $[c_1]$ *est nulle dans* $H^2(G,\Theta)$.

Preuve : Comme $G \to \mathrm{Aut}\, k[[x,y]]/(xy)$ est un homomorphisme de groupe, $f_{\sigma\tau}(x) = f_\tau(f_\sigma(x))$ et $g_{\sigma\tau}(x) = g_\tau(g_\sigma(x))$. Un relèvement $\tilde{\sigma}$ de σ à $\frac{k[\varepsilon][[x,y]]}{(xy-t\varepsilon)}$, $t \neq 0$, s'écrit (Lemme 5.1.2)

$$\tilde{\sigma}(x) = f_\sigma(x) + t\varepsilon T_\sigma(y), \text{ avec } T_\sigma(y) = \frac{-U_{\sigma,0}\sum_{i\geq 0} V_{\sigma,i+1}y^i}{V_\sigma(y)}$$

$$\tilde{\sigma}(y) = g_\sigma(y) + t\varepsilon S_\sigma(x) \text{ avec } S_\sigma(y) = \frac{-V_{\sigma,0}\sum_{i\geq 0} U_{\sigma,i+1}x^i}{U_\sigma(x)}$$

vu comme élément de $\mathrm{Aut}\, k[\varepsilon][[x,y]]$. Pour avoir un relèvement de G à $\mathrm{Aut}\, k[\varepsilon][[x,y]]/(xy-t\varepsilon)$ nous devons vérifier que le 2-cocycle $c_1(\sigma,\tau)$ défini par l'égalité $\tilde{\sigma}\tilde{\tau} \equiv c_1(\sigma,\tau)\widetilde{\sigma\tau}\ (xy-t\varepsilon)$ est un 2-cobord. Écrivons

$$c_1(\sigma,\tau)(x) = x + t\varepsilon\phi_{\sigma,\tau}(x),\ c_1(\sigma,\tau)(y) = y + t\varepsilon\psi_{\sigma,\tau}(y)$$

Nous avons

$$\tilde{\sigma}\tilde{\tau}(x) = \tilde{\sigma}(f_\tau(x) + t\varepsilon T_\tau(y)) = f_\tau(f_\sigma(x) + t\varepsilon T_\sigma(y)) + t\varepsilon T_\tau(g_\sigma(y))$$

$$\tilde{\sigma}\tilde{\tau}(x) = f_{\sigma\tau}(x) + t\varepsilon\Big(f'_\tau(f_\sigma(x))T_\sigma(y) + T_\tau(g_\sigma(y))\Big)$$

Or $T_\sigma(y) = -\beta_\sigma + y(\text{polynôme en y})$ pour $\beta_\sigma = \frac{U_{\sigma,0}}{V_{\sigma,0}}V_{\sigma,1}$ et $f'_\tau(x) = U_\tau(x) + xU'_\tau(x)$. Donc modulo $(xy-t\varepsilon)$,

$$\tilde{\sigma}\tilde{\tau}(x) \equiv f_{\sigma\tau}(x) + t\varepsilon\Big(-\beta_\sigma f'_\tau(f_\sigma(x)) + \beta_\sigma U_{\tau,0} + U_{\tau,0}T_\sigma(y) + T_\tau(g_\sigma(y))\Big)$$

Nous devons identifier ce terme avec la classe modulo $(xy-t\varepsilon)$ de

$$c_1(\sigma,\tau)\widetilde{\sigma\tau}(x) = f_{\sigma\tau}(x) + t\varepsilon(f'_{\sigma\tau}(x)\phi_{\sigma\tau}(x) + T_{\sigma\tau}(y))$$

Remarquons d'abord que les termes en y coincident. Comme $g_{\sigma\tau}(y) = g_\tau(g_\sigma(y))$, $V_{\sigma\tau}(y) = V_\sigma(y)V_\tau(g_\sigma(y))$. Donc

$$1 - U_{\sigma\tau,0}V_{\sigma\tau}(y) = \frac{V_{\sigma\tau}(y)}{V_\sigma(y)}\Big(\frac{1}{V_\tau(g_\sigma(y))} - U_{\sigma\tau,0}V_\sigma(y)\Big)$$

$$= \frac{V_{\sigma\tau}(y)}{V_\sigma(y)}\Big(U_{\tau,0}(1 - U_{\sigma,0}V_\sigma(y)) + \frac{1 - U_{\tau,0}V_\tau(g_\sigma(y))}{V_\tau(g_\sigma(y))}\Big)$$

Donc

$$\frac{1 - U_{\sigma\tau,0}V_{\sigma\tau}(y)}{V_{\sigma\tau}(y)} = U_{\tau,0}\frac{1 - U_{\sigma,0}V_\sigma(y)}{V_\sigma(y)} + \frac{1 - U_{\tau,0}V_\tau(g_\sigma(y))}{V_\sigma(y)V_\tau(g_\sigma(y))}$$

Or $yT_\sigma(y) = \frac{1-U_{\sigma,0}V_\sigma(y)}{V_\sigma(y)} \in k[[y]]$. D'où

$$T_{\sigma\tau}(y) = U_{\tau,0}T_\sigma(y) + T_\tau(g_\sigma(y))$$

Les termes en x donnent $\phi_{\sigma,\tau}$:

$$\phi_{\sigma,\tau}(x) = \beta_\sigma\Big(\frac{1 - f'_\tau(f_\sigma(x))}{f'_{\sigma\tau}(x)}\Big)$$

Comme $\beta_\sigma + \beta_\tau = \beta_{\sigma\tau}$ et $f'_{\sigma\tau}(x) = f'_\sigma(x)f'_\tau(f_\sigma(x))$ sont inversibles

$$\phi_{\sigma,\tau}(x) = \frac{\beta_{\sigma\tau}}{f'_{\sigma\tau}(x)} - \frac{\beta_\tau}{f'_{\sigma\tau}(x)} - \frac{\beta_\sigma}{f'_\sigma(x)}$$

Or l'action de G sur les champs de vecteur s'écrit $\sigma\Big(\frac{\beta_\tau}{f'_\tau(x)}\Big) = \frac{\beta_\tau}{f'_{\sigma\tau}(x)}$. Donc

$$\phi_{\sigma,\tau}(x) = \frac{\beta_{\sigma\tau}}{f'_{\sigma\tau}(x)} - \sigma\Big(\frac{\beta_\tau}{f'_\tau(x)}\Big) - \frac{\beta_\sigma}{f'_\sigma(x)}$$

De la même façon, nous pouvons montrer que

$$\psi_{\sigma,\tau}(y) = \frac{\alpha_{\sigma\tau}}{g'_{\sigma\tau}(y)} - \sigma\Big(\frac{\alpha_\tau}{g'_\tau(y)}\Big) - \frac{\alpha_\sigma}{g'_\sigma(y)}$$

Les relèvements $\tilde{\sigma}$ de $\sigma \in G$ à $k[[x,y]]/(xy)$ définissent une déformation G-équivariante $\Big[\frac{k[\varepsilon][[x,y]]}{(xy-t\varepsilon)}, G\Big]$, $t \neq 0$ de $\mathcal{O}$ à $k[\varepsilon]$ si et seulement si la classe $[c_1]$ de $c_1 : G^2 \to \Theta$,

$$c_1(\sigma,\tau) = \Big(\frac{\beta_{\sigma\tau}}{f'_{\sigma\tau}(x)} - \sigma\Big(\frac{\beta_\tau}{f'_\tau(x)}\Big) - \frac{\beta_\sigma}{f'_\sigma(x)}\Big)\frac{\partial}{\partial x} + \Big(\frac{\alpha_{\sigma\tau}}{g'_{\sigma\tau}(y)} - \sigma\Big(\frac{\alpha_\tau}{g'_\tau(y)}\Big) - \frac{\alpha_\sigma}{g'_\sigma(y)}\Big)\frac{\partial}{\partial y}$$

est nulle dans $H^2(G,\Theta)$. ∎

Remarque 5.3.4 D'après le lemme 3.3.1,

$$\dim_k \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O},G}(\widehat{\Omega}_{\mathcal{O}/k}, \mathcal{O}) = \dim_k H^1(G,\Theta) + \delta_1$$

avec $\delta_1 = 1$ si la classe $[c_1]$ est nulle et $\delta_1 = 0$ sinon. D'après le calcul précédent (Lemme 5.3.3), ce terme δ_1 s'interprète comme la contribution des déformations du point double aux déformations équivariantes.

Soit $G =< \sigma >\in \mathrm{Aut}\,\frac{k[[x,y]]}{(xy)}$ un p-groupe cyclique G qui préserve les branches et agit trivialement sur l'espace tangent du point double. Notons $G_x =< \sigma(x) >$, $G_y =< \sigma(y) >$ et p^{n_x}, p^{n_y} leurs ordres respectifs. Le groupe G_x (resp. G_y) s'identifie au groupe de Galois de l'extension $k((x))/k((t_x))$ (resp. $k((y))/k((t_y))$) avec $k[[t_x]] = k[[x]]^{G_x}$ (resp. $k[[t_y]] = k[[y]]^{G_y}$). Notons β_x (resp. β_y) l'exposant de la différente de $k((x))/k((t_x))$ (resp. de $k((y))/k((t_y))$). Par convention cette différente est égale à -1 si le groupe de Galois est trivial. Avec ces notations, nous pouvons énoncer le corollaire suivant :

Corollaire 5.3.5 *Soit $G \in Aut\frac{k[[x,y]]}{(xy)}$ un p-groupe cyclique qui préserve les branches et agit trivialement sur l'espace tangent du point double. Alors*

$$\dim_k \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O},G}(\widehat{\Omega}^1_{\mathcal{O}/k}, \mathcal{O}) = \Big\lfloor \frac{2(\beta_x+1)}{p^{n_x}} \Big\rfloor - \Big\lceil \frac{\beta_x+1}{p^{n_x}} \Big\rceil + \Big\lfloor \frac{2(\beta_y+1)}{p^{n_y}} \Big\rfloor - \Big\lceil \frac{\beta_y+1}{p^{n_y}} \Big\rceil + \delta_1$$

où $\delta_1 = 1$ si la classe $[c_1]$ est nulle et $\delta_1 = 0$ sinon.

Preuve : Nous avons la suite exacte (Lemme 3.3.1)

$$0 \to H^1(G,\Theta) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O},G}(\widehat{\Omega}^1_{\mathcal{O}/k},\mathcal{O}) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}}(\widehat{\Omega}^1_{\mathcal{O}/k},\mathcal{O})^G \xrightarrow{\varphi} H^2(G,\Theta)$$

Comme l'action de G est supposée triviale sur l'espace tangent

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}}(\widehat{\Omega}^1_{\mathcal{O}/k},\mathcal{O})^G \simeq \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}}(\widehat{\Omega}^1_{\mathcal{O}/k},\mathcal{O}) \simeq k$$

Ainsi $\dim_k \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O},G}(\widehat{\Omega}^1_{\mathcal{O}/k},\mathcal{O}) = \dim_k H^1(G,\Theta) + \delta_1$ avec $\delta_1 = 1$ si $\varphi = 0$ et $\delta_1 = 0$ sinon (cette condition est traduite en termes de nullité de la classe $[c_1]$ dans le lemme 5.3.3).
Il nous suffit donc de calculer $\dim_k H^1(G,\Theta)$. D'après le lemme 5.3.1, $\Theta = xk[[x]]\frac{\partial}{\partial x} \oplus yk[[y]]\frac{\partial}{\partial y}$. En reprenant la preuve de la proposition 4.1.1 [BeMé], nous obtenons

$$\dim_k H^1(G_x, xk[[x]]\frac{d}{dx}) = \Big\lfloor \frac{2(\beta_x+1)}{p^{n_x}} \Big\rfloor - \Big\lceil \frac{\beta_x+1}{p^{n_x}} \Big\rceil$$

D'où le résultat annoncé. ∎

Remarque 5.3.6 Si $G = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, et si les conducteurs de G_x, G_y sont différents de 1, alors $\delta_1 = 1$. En effet dans ce cas $\alpha_\sigma = \beta_\sigma = 0$, $\sigma \in G$, donc $c_1 = 0$.

Corollaire 5.3.7 *Soit $G \subset \frac{k[[x,y]]}{(xy)}$ un p-groupe cyclique qui préserve les branches et agit trivialement sur l'espace tangent du point double. Alors*

$$\dim_k \mathrm{Ext}^2_{\mathcal{O},G}(\widehat{\Omega}^1_{\mathcal{O}/k},\mathcal{O}) = \dim_k \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O},G}(\widehat{\Omega}^1_{\mathcal{O}/k},\mathcal{O}) + \delta_2$$

avec $\delta_2 \in \{0,1\}$.

Preuve : La suite suivante est exacte (Lemme 3.3.2)

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}}(\widehat{\Omega}^1_{\mathcal{O}/k},\mathcal{O}) \to H^2(G,\Theta) \to \mathrm{Ext}^2_{\mathcal{O},G}(\widehat{\Omega}^1_{\mathcal{O}/k},\mathcal{O}) \to H^1(G,\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}}(\widehat{\Omega}^1_{\mathcal{O}/k},\mathcal{O})) \to H^3(G,\Theta)$$

D'après le lemme 5.3.1, $\Theta = xk[[x]]\frac{\partial}{\partial x} \oplus yk[[y]]\frac{\partial}{\partial y}$. D'après la proposition 4.1.1 [BeMé] $\dim_k H^1(G_x, xk[[x]]\frac{d}{dx}) = \dim_k H^2(G_x, xk[[x]]\frac{d}{dx})$. D'où

$$\dim_k H^1(G,\Theta) = \dim_k H^2(G,\Theta)$$

Avec les notations du corollaire 5.3.5, $\dim_k \mathrm{Coker}\Big(\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}}(\widehat{\Omega}^1_{\mathcal{O}/k},\mathcal{O}) \to H^2(G,\Theta)\Big) = \delta_1$. D'où

$$\dim_k \mathrm{Ext}^2_{\mathcal{O},G}(\widehat{\Omega}^1_{\mathcal{O}/k},\mathcal{O}) =$$

$$\dim_k \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O},G}(\widehat{\Omega}^1_{\mathcal{O}/k},\mathcal{O}) + \dim_k \ker\Big(H^1(G,\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}}(\widehat{\Omega}^1_{\mathcal{O}/k},\mathcal{O})) \to H^3(G,\Theta)\Big)$$

∎

Les corollaires 5.3.5, 5.3.7 revèlent l'importance de la notion d'épaisseur de la déformation verselle : La déformation formelle équivariante du point double a pour base $\frac{R_{\text{ver}}[[x,y]]}{(xy-r)}$ où R_{ver} est l'anneau versel de la déformation et $r \in \mathcal{M}_{R_{\text{ver}}}$. *L'épaisseur de la déformation verselle* est définie par $e = \sup(m, r \in \mathcal{M}^m_{R_{\text{ver}}})$. La nullité de la classe $[c_1]$ traduit que l'épaisseur de la déformation verselle $\frac{R_{\text{ver}}[[x,y]]}{(xy-r)}$ est 1 : $r \not\equiv 0 \bmod \mathcal{M}^2_{R_{\text{ver}}}$. Plus généralement, il serait intéressant d'interpréter cohomologiquement l'épaisseur e de la déformation verselle (où e est défini par $r \in \mathcal{M}^e_{R_{\text{ver}}}$, $r \notin \mathcal{M}^{e+1}_{R_{\text{ver}}}$). Enfin il est naturel de demander sous quelle condition sur le groupe d'inertie G du point double, l'action de G est lissifiable.

Biblographie

[Ar1] M. Artin. Lectures on deformations of singularities. Tata Institute of fundamental research, Bombay (1976).

[Ar2] M. Artin. *Algebraic approximation of structures over complete local rings*. Publ. I.H.E.S. (1969), 23–58.

[BeMé] J. Bertin, A. Mézard, *Déformations formelles des revêtements sauvagement ramifiés de courbes algébriques*. Prépublication électronique math.AG/9810066 (1998).

[DeMu] P. Deligne, D. Mumford. *The irreductibility of the space of curves of given genus*. Publication de l'IHES **36** (1969), 75–109.

[Ek] T. Ekedahl. *Boundary behaviour of Hurwitz schemes*. Dans The moduli space of curves, R. Dijkgraaf, C. Faber, G. van der Geer ed., Birkhäuser (1995).

[GrMa] B. Green, M. Matignon. *Liftings of Galois covers of smooth curves*, Comp. Math. **113** (1998), 239–274.

[Gr1] A. Grothendieck. *Sur quelques points d'algèbre homologique*. Tôhoku Mathematical Journal **9** (1957), 119–221.

[Gr2] A. Grothendieck. Séminaire de géométrie algébrique. Publications de l'IHES (1962).

[Gr3] A. Grothendieck. *Fondements de la géométrie algébrique*. Extraits du Sém. Bourbaki 1957-1962. Sécr. Math., Paris (1962).

[HaSt] D. Harbater, K. Stevenson. *Patching and Thickening Problems*. J. of algebra **212** (1999), 272–304.

[He] Y. Henrio. Arbres de Hurwitz et automorphismes d'ordre p des disques et des couronnes p-adiques formels. Thèse de doctorat, Bordeaux France (1999).

[Il] L. Illusie. *Complex contangent et déformations II*. Lecture Notes in Math. **240** (1971).

[LiSc] S. Lichtenbaum, M. Schlessinger. *The cotangent complex of a morphism.* Trans. Amer. Math. Soc. **128** (1967), 41-70.

[Sa] M. Saïdi. *Revêtements modérés et groupe fondamental de groupes.* Compositio Math. **107** (1997), 319–338.

[Sc] M. Schlessinger. *Functors of Artin rings.* Trans. Am. Soc. **130** (1968), 208–222.

[Vi] A. Vistoli. *The deformation theory of local complete intersections.* Prépublication alg-geom/9703008.

Université de Grenoble I
Institut Fourier
UMR 5582 CNRS-UJF
UFR de Mathématiques
B.P. 74
38402 Saint-Martin d'Hères Cedex (France)

courriel : jose.bertin@ujf-grenoble.fr, ariane.mezard@ujf-grenoble.fr